数理解析研究所講究録
1140 巻 2000 年 107-121

On cohomological Mackey functors

小田 文仁 (ODA, FUMIHITO) *

1 はじめに

Bouc [Bo97] によると，有限群の表現論における誘導に関する理論の公理論的取り扱いから始まったG-functors [Gr 71], あるいは Mackey functors [Dr72] の理論は，本質的に3種類の方法で研究が行なわれてきたとのことである．第1は，Green による有限群の部分群全体が作る poset から構成するもっとも素朴な方法 [Gr 71] であり，彼は naive と呼んだ．第2に，Dress, Yoshida による有限 G-集合の圏から構成する，文字通り圏論的な方法 [Dr72], [Yo83] で，categoric と呼んだ．第3は，Thévenaz, Webb による Mackey 代数上の加群として取り扱う方法 [Th91], [TW89], [TW95] で，algebraic と呼んだ．

この報告は algebraic なアプローチによる具体的な計算例（Loewy series, tensor prodct, AR-quiver 等) を，特に構造が比較的やさしいとされている cohomological と呼ばれるクラスの Mackey functors について，通常の Mackey functors と対比しながら述べることを目標とする．

筆者は，Sasaki [Sa82], Thévenaz-Webb [TW95], Yoshida [Yo85] 等によって始められたモジュラー表現論のアナロジーである，正標数の体の上の Mackey 代数の表現論に特に興味を抱き勉強してきた．ブロックの理論，射影加群の構造，表現環，Auslander-Reiten quiver 等について，Mackey 代数上での計算を試みてきた．理論あるいは，定理と呼べるような結果が得られたなどとは，到底いい難いが，とにかく群環との著しい差異だけは感じ取っていただけることと思う．

2 Mackey functors

2.1 定義

G で有限群，$\mathcal{O}$ で単位元をもつ可換環を表す．G の $\mathcal{O}$ 上の **Mackey functor** M は G のすべての部分群から左 $\mathcal{O}$–加群の圏への対応

$$M : \{\text{subgroups of}\, G\} \longrightarrow \mathcal{O}\text{-mod}$$

と3種類の $\mathcal{O}$–準同型

$$\begin{array}{rcll} I_K^H & : & M(K) \longrightarrow M(H) & \text{(induction)} \\ R_K^H & : & M(H) \longrightarrow M(K) & \text{(restriction)} \\ c_g^H & : & M(H) \longrightarrow M({}^gH) & \text{(conjugation)} \quad ({}^gH := gHg^{-1}) \end{array}$$

で以下の条件を満たすものである．ただし，ここで $K \leq H$ は G の部分群，$g \in G$ とする．

(0) $I_H^H, R_H^H, c_h^H : M(H) \to M(H)$ はすべての部分群 H および $h \in H$ に対して恒等写像である．

* 日本学術振興会特別研究員 (PD), 北海道大学

(1) $R_L^K R_K^H = R_L^H$, $I_K^H I_L^K = I_L^H$ がすべての部分群 $L \le K \le H$ に対して成り立つ.

(2) $c_g^{hH} c_h^H = c_{gh}^H$ がすべての部分群 $H \le G$ と $g, h \in G$ に対して成り立つ.

(3) $R_{{}^gK}^{{}^gH} c_g^H = c_g^K R_K^H$, $I_{{}^gK}^{{}^gH} c_g^K = c_g^H I_K^H$ がすべての部分群 $K \le H$ と $g \in G$ に対して成り立つ.

(4) $R_L^H I_K^H = \sum_{x\in[L\backslash H/K]} I_{L\cap {}^xK}^L c_x^{L^x\cap K} R_{L^x\cap K}^K$ がすべての部分群 $L, K \le H$ に対して成り立つ.

G の Mackey functor M は, さらに条件

(co) $I_K^H R_K^H = |H:K| \cdot Id_{M(K)}$ がすべての部分群 $K \le H \le G$ に対して成り立つ,

を満たすとき **cohomological** とよばれる.

Mackey functor M から Mackey functor N への **homomorphism** $\theta = \{\theta_H\}$ は $\mathcal{O}$–準同型

$$\theta_H : M(H) \longrightarrow N(H), \quad \forall H \le G,$$

の集まりですべての部分群 $K \le H \le G$ と $g \in G$ に対して以下の図式を可換にするものである.

$$\begin{array}{ccc} M(K) & \xrightarrow{\theta_K} & N(K) \\ \downarrow{\scriptstyle I_K^H} & & \downarrow{\scriptstyle I_K^H} \\ M(H) & \xrightarrow{\theta_H} & N(H), \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M(K) & \xrightarrow{\theta_K} & N(K) \\ \uparrow{\scriptstyle R_K^H} & & \uparrow{\scriptstyle R_K^H} \\ M(H) & \xrightarrow{\theta_H} & N(H), \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M(H) & \xrightarrow{\theta_H} & N(H) \\ \downarrow{\scriptstyle c_g^H} & & \downarrow{\scriptstyle c_g^H} \\ M({}^gH) & \xrightarrow{\theta_{{}^gH}} & N({}^gH). \end{array}$$

2.2 Example

V を $\mathcal{O}G$–加群とする. G の $\mathcal{O}$ 上の **fixed point functor** FP_V は $H \le G$ に対し V の H 固定点を対応させる

$$FP_V : H \longmapsto V^H := \{ v \in V \,|\, h \cdot v = v \quad \forall h \in H \}$$

と $\mathcal{O}$–準同型

$$\begin{aligned} \tau_K^H &: FP_V(K) \longrightarrow FP_V(H) \quad \text{(trace)} \\ &;\ v \longmapsto (\sum_{h\in H/K} h) \cdot v, \\ \rho_K^H &: FP_V(H) \longrightarrow FP_V(K) \quad \text{(inclusion)} \\ &;\ v \longmapsto v, \\ \sigma_g^H &: FP_V(H) \longrightarrow FP_V({}^gH) \quad \text{(conjugation)} \\ &;\ v \longmapsto g \cdot v \end{aligned}$$

である. ただし, $K \le H \le G$, $g \in G$ とする. 特に FP_V は cohomological Mackey functor である.

2.3 Mackey algebras

Mackey functors を加群とみなすことのできる代数を定義するために, G のすべての部分群を頂点集合とする quiver $\mathcal{Q}$ (有向グラフ) を準備する. 辺は部分群 $K \le H \le G$ に対して

$$K\bullet \xrightarrow{I_K^H} \bullet H, \quad K\bullet \xleftarrow{R_K^H} \bullet H,$$

$g \in G$, $H \le G$ に対しては

$$H\bullet \xrightarrow{c_g^H} \bullet {}^gH$$

と定める.

Λ で $\mathcal{O}$ 上の $\mathcal{Q}$ の path 代数 [Be91]を表す. Mackey functor の定義 (1)–(4) と以下の (0') で生成される Λ のイデアルを J とする.

(0') すべての部分群 $H \leq G$ と $h \in H$ に対して $I_H^H = R_H^H = c_h^H$ は H の長さ0 のパスとする.

このとき Λ/J を G の $\mathcal{O}$ 上の **Mackey algebra** [TW95] と呼び $\mu_{\mathcal{O}}(G)$ で表す. $\mu_{\mathcal{O}}(G)$ は自由 $\mathcal{O}$–加群として,

$$\{I_{{}^gL}^K c_g^H R_L^H\}$$

という基底を持つ. ただし, $H, K \leq G$, KgH は G の K と H による両側剰余類を動き L は $H \cap K^g$ の 部分群の $H \cap K^g$–共役類を動く.

2.4 Example

G を位数 2 の巡回群とする $G = \{1, g\}$. このとき可換環 $\mathcal{O}$ に対して Mackey algebra $\mu_{\mathcal{O}}(G)$ の基底は, $\{c_1^1, c_g^1, I_1^G, R_1^G, I_1^G R_1^G, I_G^G\}$ となる.

2.5 Cohomological Mackey algebra

Mackey algebra の定義と同様に, Λ は $\mathcal{O}$ 上の $\mathcal{Q}$ の path 代数とする. Mackey algebra を構成するときの Λ のイデアル J の代わりに関係 (0'), (1)–(4) と (co) で生成されるイデアルを J^c とする. このとき Λ/J^c を G の $\mathcal{O}$ 上の **cohomological Mackey algebra** [TW95] と呼び $\mu_{\mathcal{O}}^c(G)$ で表す.

2.6 Example

G を位数 2 の巡回群, $\mathcal{O}$ を標数 2 の体とする. このとき, $I_1^G R_1^G = |G:1| = 0$ なので cohomological Mackey algebra $\mu_{\mathcal{O}}^c(G)$ の基底は $\{c_1^1, c_g^1, I_1^G, R_1^G, I_G^G\}$ となる.

3 Mackey functors and $\mu_{\mathcal{O}}(G)$–modules

圏論的な Mackey functors の理論は, 前節で定義された Mackey algebra 上の加群とみなすことができ, 加群論的な取り扱いが可能になる. この節では, Thévenaz と Webb [TW95] により紹介された Mackey functors の圏と $\mu_{\mathcal{O}}(G)$–modules の圏の同値性について述べる.

3.1 Mackey functors から $\mu_{\mathcal{O}}(G)$–modules

M を G の $\mathcal{O}$ 上の Mackey functor とする. このとき, $\mathcal{O}$–加群 $\oplus_{H \leq G} M(H)$ は自然に $\mu_{\mathcal{O}}(G)$–加群の構造をもつ.

3.2 Example

Example 2.2 の fixed point functor を考える. G として位数 2 の巡回群, $\mathcal{O}$ として標数 2 の体 k, V は 群環 kG とする.

$$FP_{kG} : H \mapsto kG^H.$$

すると, G の部分群に対応する像は

$$FP_{kG} : \begin{cases} 1 & \rightarrow & kG = < u, v | gu = u + v,\ gv = v > \\ G & \rightarrow & k = < w > \end{cases}$$

(ただし, $u=g$, $v=1+g=w$) となり, 誘導, 制限, 共役は以下のようになる.

$$I_1^G : \begin{cases} u & \mapsto & w \\ v & \mapsto & 0 \end{cases} \quad R_1^G : w \mapsto v \quad c_g^1 : \begin{cases} u & \mapsto & u+v \\ v & \mapsto & v \end{cases} \quad c_g^G : w \mapsto w.$$

従って, Mackey functor FP_{kG} に対応する $\mu_k(G)$–加群は

$$FP_{kG}(1) \oplus FP_{kG}(G)$$

$$=< u, v, w | I_1^G(u) = w,\ I_1^G(v) = 0,\ R_1^G(w) = v,\ c_g^1(u) = u+v,\ c_g^1(v) = v,\ c_g^G(w) = w >_k$$

となる.

3.3 $\mu_{\mathcal{O}}(G)$–modules から Mackey functors

A を $\mu_{\mathcal{O}}(G)$–加群とする. このとき, 部分群 H に対して

$$M(H) = I_H^H \cdot A$$

と定め, 3 種類の $\mathcal{O}$–準同型induction, restriction, conjugation をそれぞれ左から Mackey algebra の元 I_K^H, R_H^K, c_g^H をかけることにすると M は Mackey functor になる. 従って, Mackey functors と $\mu_{\mathcal{O}}(G)$–加群は同一視できる.

$$M \longleftrightarrow \bigoplus_{H \leq G} M(H).$$

以下, 特に断らない限りそれらを同じ記号で表す; $M = \bigoplus_{H \leq G} M(H)$. また, Mackey algebra 上の加群における sub, simple, projective, injective 等の用語はそのまま, Mackey functor の修飾語としても適用可能であるということを注意する.

3.4 Example

Example 2.4 で $\mathcal{O}$ として標数 2 の体 k を考える. $T =< c_1^1, c_g^1, I_1^G >_k$ は $\mu_k(G)$ の $\mu_k(G)$–部分加群である. このとき T に対応する Mackey functor は

$$T : \begin{cases} 1 & \to & I_1^1 \cdot T =< c_1^1, c_g^1 >_k \\ G & \to & I_G^G \cdot T =< I_1^G >_k \end{cases}$$

となり, 誘導, 制限, 共役は以下のようになる.

$$I_1^G : \begin{cases} c_1^1 & \mapsto & I_1^G c_1^1 = I_1^G \\ c_g^1 & \mapsto & I_1^G c_g^1 = c_g^G I_1^G = I_1^G, \end{cases} \quad R_1^G : I_1^G \mapsto R_1^G I_1^G = c_1^1 + c_g^1,$$

$$c_g^1 : \begin{cases} c_1^1 & \mapsto & c_g^1 c_1^1 = c_g^1 \\ c_g^1 & \mapsto & c_g^1 c_g^1 = c_1^1 \end{cases} \quad c_g^G : I_1^G \mapsto c_g^G I_1^G = I_1^G.$$

ここで, c_g^1, $c_1^1 + c_g^1$, I_1^G をそれぞれ Example 3.2 の u, v, w に対応させると 2 つの Mackey functors FP_{kG} と T は同型であることがわかる.

4 Simple Mackey functors

Mackey functor のsubfunctor lattice の構造を決定する際の最小単位となる simple Mackey functor の分類は, Thévenaz と Webb が行った [TW89]. この節では, その分類を概観する.

4.1 Unique minimal subfunctor of FP_V

$\mathcal{O}G$-加群 V の fixed point functor FP_V は unique minimal subfunctor (従って simple Mackey functor)

$$S^G_{1,V}\,;\, H \longmapsto (\sum_{h\in H} h)\cdot V$$

を持つ. ただし, 3 種類の準同型 (induction, restriction, conjugation) は FP_V のそれらと同じものである. 特に $S^G_{1,V}(1) = FP_V(1) = V$ が成り立っている.

4.2 Induction functor

H を G の部分群とする. H の Mackey functor N (induction, restriction, conjugation をそれぞれ, t, r, c とする.) に対して **induction functor** $N\uparrow^G_H$ は G の部分群 K に対して

$$N\uparrow^G_H : K \longmapsto \bigoplus_{KgH\in[K\backslash G/H]} N({}^gK\cap H)$$

と定めて得られる G の Mackey functor である. ただし,

$$x = \sum_{KgH\in[K\backslash G/H]} x_g \in \bigoplus_{KgH\in[K\backslash G/H]} N({}^gK\cap H) = N\uparrow^G_H(K),$$

$L \le K \le G$, $y \in N\uparrow^G_H(L)$, $s\in G$ に対し $N\uparrow^G_H$ の 3 種類の準同型 I, R, c は

$$\begin{aligned} R^K_L(x)_g &= r^{H\cap K^g}_{H\cap L^g}(x_g),\\ I^K_L(y)_g &= \sum_{u\in[L\backslash K/K\cap {}^gH]} t^{H\cap K^{ug}}_{H\cap L^{ug}}(y_{ug}),\\ c^K_s(x)_g &= x_{s^{-1}g} \end{aligned}$$

とする.

4.3 Inflation functor

N を G の正規部分群, G/N を Q とする. Q の Mackey functor L (induction, restriction, conjugation はそれぞれ t, r, c とする.) に対して **inflation functor** $\mathrm{Inf}^G_Q L$ は, G の部分群 K に対して

$$\mathrm{Inf}^G_Q L(K) = \begin{cases} L(K/N) & \text{if } N\subseteq K\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

さらに, $N \le K \le H$, $g\in G$ のとき $R^H_K = r^{H/N}_{K/N}$, $I^H_K = t^{H/N}_{K/N}$, $c^K_g = c^{K/N}_{gN}$ それ以外はすべて零写像として定まる G の Mackey functor である.

4.4 Simple Mackey functors

NH で H の G における正規化群, $NH/H = WH$ とする. H を G の任意の部分群, V を simple $\mathcal{O}WH$-加群とする. V の WH における fixed point functor FP_V の unique minimal subfunctor $S^{WH}_{1,V}$ の NH への inflation functor を G まで誘導した induction functor を $S^G_{H,V}$ とする;

$$S_{H,V} := S^G_{H,V} = (\mathrm{Inf}^{NH}_{WH} S^{WH}_{1,V})\uparrow^G_{NH}.$$

Theorem 4. 1 (Thévenaz-Webb) $S_{H,V}$ は G の $\mathcal{O}$ 上の *simple Mackey functor* である. さらに,

$$\{S_{H,V} \mid (H,V) \text{ は } G\text{-共役類の代表元 }\}$$

は G の $\mathcal{O}$ 上の *simple Mackey functor* の完全代表系である.

よく用いられる simple Mackey functor の性質のひとつを挙げておく.

Lemma 4. 2 $S_{H,V}$ を G の *simple Mackey functor,* K を G の部分群とすると $H =_G K$ のとき $S_{H,V}(K) = V$, $H <_G K$ のとき $S_{H,V}(K) = 0$ が成り立つ.

4.5 Simple cohomological Mackey functors

Theorem 4. 3 (Thévenaz-Webb) $\mathcal{O}$ を標数 p の体とする. $S_{H,V}$ が G の $\mathcal{O}$ 上の *simple cohomological Mackey functor* であるための必要十分条件は H が p-部分群であることである. さらに,

$$\{S_{H,V} \mid (H,V) \text{ は } G\text{-共役類の代表元}, H \text{ は } p\text{-部分群 }\}$$

は G の $\mathcal{O}$ 上の *simple cohomological Mackey functors* の完全代表系である.

4.6 Simple Mackey functors for cyclic p-group

この節では, G として素数べき位数 p^n の有限巡回 p-群 C_{p^n}, $\mathcal{O}$ として標数 p の体 k の場合の simple Mackey functor について述べる. モジュラー表現論の基本的な事実から, p-群の k 上の既約加群は自明なもの, つまり k だけである. 従って C_{p^n} の位数 p^i の部分群 C_{p^i} に対して $WC_{p^i} \cong C_{p^{n-i}}$ の既約加群も k のみである. 従って, C_{p^n} の k 上の simple Mackey functors の完全代表系は Theorem 4. 1 から $n+1$ 個の $S_{1,k}, S_{C_p,k}, S_{C_{p^2},k}, \cdots, S_{C_{p^{n-1}},k}, S_{C_{p^n},k}$ である.

4.7 Example

G として位数 2 の巡回群, $\mathcal{O}$ として標数 2 の体 k とする. このとき, G の k 上の simple Mackey functors は $S_{1,k}$ と $S_{G,k}$ となる. 簡単な計算から部分群に対するそれらの k-加群としての像が

$$S_{1,k} : \begin{cases} 1 & \to & k \\ G & \to & 0 \end{cases} \qquad S_{G,k} : \begin{cases} 1 & \to & 0 \\ G & \to & k \end{cases}$$

であることがわかる. 一般に

Lemma 4. 4 位数 p^n の巡回群 C_{p^n} の 標数 p の体 k 上の *simple Mackey functor* に対して

$$S_{C_{p^i},k}(Q) = \begin{cases} k & (Q = C_{p^i}) \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

が成り立つ. ただし, $0 \leq i \leq n$.

5 Burnside functors

本来 Burnside functor は G の部分群の Burnside ring から構成されるものであるが, Mackey functor として考える際には環としての構造は無視できるので, $\mathcal{O}$-加群としての構成のみを述べる.

5.1 Burnside ring

Burnside ring は, 圏論的には有限 G–集合の圏の直和と直積に関する Grothendieck ring ということで定義されるが, ここでは, 実際の計算に必要な $\mathcal{O}$–加群としての基底を挙げる. G の $\mathcal{O}$ 上の **Burnside ring** $B(G)$ の $\mathcal{O}$–基底は

$$\{[G/H] \mid \text{ただし, } H \text{ は } G \text{ の部分群の } G\text{–共役類の代表元} \}$$

である.

5.2 Burnside functors

G の $\mathcal{O}$ 上の **Burnside functor** (あるいは Burnside ring Mackey functor) B^G は任意の部分群 H に対し $\mathcal{O}$–加群 $B(H)$ と 3 種類の $\mathcal{O}$–準同型

$$\begin{aligned}
t_K^H \ &: \ B(K) \longrightarrow B(H) \\
&; \ [K/J] \longmapsto [H/J] \\
r_K^H \ &: \ B(H) \longrightarrow B(K) \\
&; \ [H/J] \longmapsto \bigcup_{KhJ \in [K\backslash H/J]} [K/(K \cap {}^gJ)] \\
c_g^H \ &: \ B(H) \longrightarrow B({}^gH) \\
&; \ [H/J] \longmapsto [{}^gH/{}^gJ]
\end{aligned}$$

である. ただし, $J, K \leq H \leq G, g \in G$. 以上により, Burnside functor B^G に対応する $\mu_{\mathcal{O}}(G)$–加群

$$B^G = \bigoplus_{H \leq G} B^G(H) = \bigoplus_{H \leq G} B(H)$$

が構成できる.

5.3 Example

G として位数 2 の巡回群, $\mathcal{O}$ としては標数 2 の体 k を考える. このとき Burnside functor B^G の部分群に対する像は

$$B^G : \begin{cases} 1 & \rightarrow \ B(1) =< [1/1] >_k \\ G & \rightarrow \ B(G) =< [G/G], [G/1] >_k \end{cases}$$

3 種類の $\mathcal{O}$–準同型, 誘導, 制限, 共役は以下のようになる.

$$I_1^G : [1/1] \mapsto [G/1], \quad R_1^G : \begin{cases} [G/G] & \mapsto \ [1/1] \\ [G/1] & \mapsto \ \ 0, \end{cases}$$

$$c_g^1 : [1/1] \mapsto [1/1], \quad c_g^G : \begin{cases} [G/G] & \mapsto \ [G/G] \\ [G/1] & \mapsto \ [G/1]. \end{cases}$$

6 Projective Mackey functors

Mackey algebra と Burnside functors, cohomological Mackey algebra と fixed point functor の関係を述べる.

Proposition 6.1 (Thévenaz-Webb) *G と $\mathcal{O}$ に対して, Mackey functor として（従って $\mu_{\mathcal{O}}(G)$-加群として）の同型*

$$\mu_{\mathcal{O}}(G) \cong \bigoplus_{(H)} B^H \uparrow_H^G$$

が存在する. ただし, (H) は G の部分群の G-共役類の完全代表系を動く.

この命題から, 任意の Mackey functor はいくつかの部分群の Burnside functor の誘導の直和の剰余加群として得られることがわかる. また, 系として特に Burnside functor B^G が射影的であることがわかる.

Theorem 6.2 *$\mathcal{O}$ を標数 $p>0$ の体とする. このとき, G の $\mathcal{O}$ 上の Burnside functor B^G が直既約であるための必要十分条件は, G が p-群であることである.*

6.1 Example

G が位数 2 の巡回群, k が標数 2 の体のとき, Example 3.2 から fixed point functor FP_{kG} は $\mu_k(G)$-加群として以下のような構造（ Loewy 列）を持つことがわかる.

$$FP_{kG} \cong \begin{array}{c} <u> \\ <w> \\ <v> \end{array} \cong \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array}.$$

ただし $1 = S_{1,k}$, $2 = S_{G,k}$. また, Example 5.3 から Burnside functor B^G は $\mu_k(G)$-加群として以下のようになる.

$$B^G \cong \begin{array}{c} <[G/G]> \\ <[1/1]> \\ <[G/1]> \end{array} \cong \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 2 \end{array}.$$

一般に $FP_{kG} \cong B^1 \uparrow_1^G$ なので, Proposition 6.1 から以下のような G の k 上の Mackey algebra の直既約射影分解が得られる.

$$\mu_k(G) \cong B^1 \uparrow_1^G \oplus B^G \cong \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \oplus \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 2 \end{array}.$$

Proposition 6.3 (Thévenaz-Webb) *$\mathcal{O}$ は標数 p の体とする. G と $\mathcal{O}$ に対して, cohomological Mackey functor として（従って $\mu^c_{\mathcal{O}}(G)$-加群として）の同型*

$$\mu^c_{\mathcal{O}}(G) \cong \bigoplus_{(P)} FP_{\mathcal{O}} \uparrow_P^G$$

が存在する. ただし, (P) は G の p-部分群の G-共役類の完全代表系を動く.

この命題から, 任意の cohomological Mackey functor はいくつかの部分群の fixed point functor の誘導の直和の剰余加群として得られることがわかる.

6.2 Example

G が位数 2 の巡回群, k が標数 2 の体のとき, Example 3.2 から fixed point functor FP_{kG} は $\mu_k^c(G)$-加群として以下のような構造（ Loewy 列）を持つことがわかる.

$$FP_{kG} \cong \begin{array}{c} < u > \\ < w > \\ < v > \end{array} \cong \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} .$$

ただし $1 = S_{1,k}$, $2 = S_{G,k}$. また, FP_k は $\mu_k^c(G)$–加群として以下のようになる.

$$FP_k \cong \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} .$$

一般に $FP_{kG} \cong FP_{k\uparrow_1^G} \cong FP_k \uparrow_1^G$, $FP_k \cong FP_k \uparrow_G^G$ なので, Proposition 6. 3 から以下のような G の k 上の cohomological Mackey algebra の直既約射影分解が得られる.

$$\mu_k^c(G) \cong FP_k^1 \uparrow_1^G \oplus FP_k \cong \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \oplus \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} .$$

6.3 Example

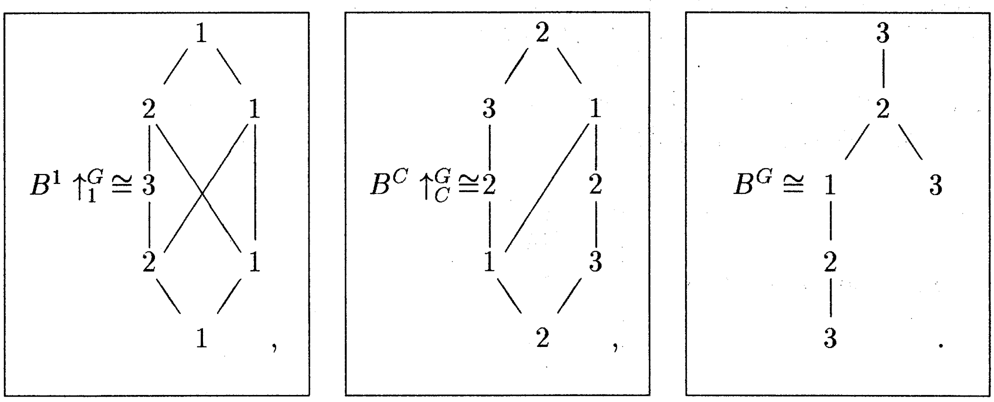
G として位数 4 の巡回群, $\mathcal{O}$ として標数 2 の体 k を考える. このとき, simple Mackey functors は $1 := S_{1,k}$, $2 := S_{C_2,k}$, $3 := S_{G,k}$ となる. C を位数 2 の巡回部分群とすると, 3 つの simple Mackey functors の像は Lemma 4. 4 より以下のようになる.

$$1 : \begin{cases} 1 & \to & k \\ C & \to & 0 \\ G & \to & 0, \end{cases} \quad 2 : \begin{cases} 1 & \to & 0 \\ C & \to & k \\ G & \to & 0, \end{cases} \quad 4 : \begin{cases} 1 & \to & 0 \\ C & \to & 0 \\ G & \to & k. \end{cases}$$

Proposotion 6. 1 から Mackey algebra は以下のような分解をもつ.

$$\mu_k(G) \cong B^1 \uparrow_1^G \oplus B^C \uparrow_C^G \oplus B^G.$$

これらの diagram [BC87] は以下のようになる [We98].



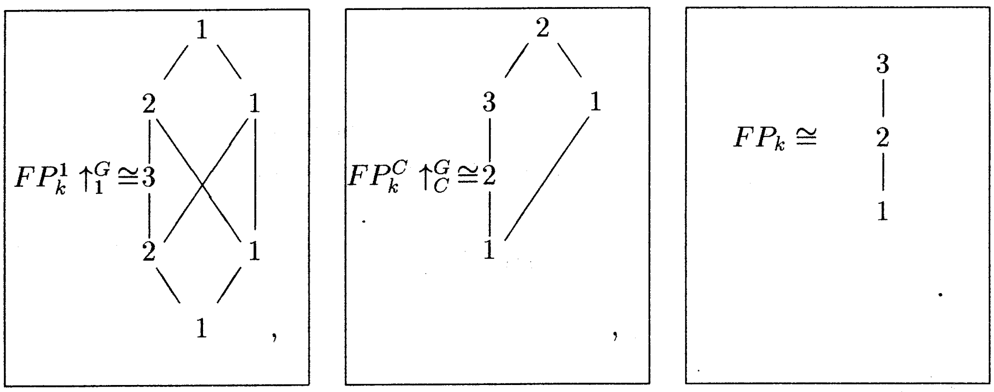
この場合 Mackey algebra $\mu_k(G)$ は対称的でも, 自己双対的でもない.

6.4 Example

G として位数 4 の巡回群, $\mathcal{O}$ として標数 2 の体 k を考える. このとき, simple cohomological Mackey functors は $1 := S_{1,k}$, $2 := S_{C_2,k}$, $3 := S_{G,k}$ となる. C を位数 2 の巡回部分群とする. 3 つの simple cohomological Mackey functors の像はsimple Mackey functors の場合と一致する. Proposotion 6. 3 から cohomological Mackey algebra は以下のような分解をもつ.

$$\mu_k^c(G) \cong FP_k^1 \uparrow_1^G \oplus FP_k^C \uparrow_C^G \oplus FP_k^G.$$

これらの diagram [BC87] は以下のようになる.



6.5 Loewy and socle series of Burnside functors

$\mathcal{O}$-多元環 A に対し, 左 A-加群 V の **radical** $\mathrm{Rad}(V)$ はV のすべての極大部分加群の共通部分である. V の **Loewy series** は帰納的に

$$\mathrm{Rad}^0(V) = V, \quad \mathrm{Rad}^i(V) = \mathrm{Rad}(\mathrm{Rad}^{i-1}(V)),$$

とする. 第 i 番目の **Loewy layer** は$\mathrm{Rad}^{i-1}(V)/\mathrm{Rad}^i(V)$ である.

V の **socle** $\mathrm{Soc}(V)$ はV のすべての既約部分加群の和である. V の**socle layers** は帰納的に

$$\mathrm{Soc}^0(V) = 0, \quad \mathrm{Soc}^i(V)/\mathrm{Soc}^{i-1}(V) = \mathrm{Soc}(V/\mathrm{Soc}^{i-1}(V))$$

とする. 第 i 番目の socle layer とは$\mathrm{Soc}^i(V)/\mathrm{Soc}^{i-1}(V)$ である.

以下の 3 つの結果については, [Od99] を参照されたい.

Theorem 6. 4 *B を位数 p^n の巡回群の標数 p の体 k 上の Burnside functor とする. このとき, B の第 $i+1$-番目の Loewy layer は*

$$\mathrm{Rad}^{\,i}(B)/\mathrm{Rad}^{\,i+1}(B) \cong \begin{cases} \displaystyle\bigoplus_{j=0}^{\frac{n-|n-i|}{2}} S_{C_{p^{|n-i|+2j}},k} & \text{if } i : \text{even}, \\ \displaystyle\bigoplus_{j=0}^{\frac{n-1-|n-i|}{2}} S_{C_{p^{|n-i|+2j}},k} & \text{if } i : \text{odd}. \end{cases}$$

である. ただし, $0 \le i \le 2n$.

Theorem 6.5 *B* を位数 p^n の巡回群の標数 p の体上 k の *Burnside functor* とする．このとき，B の第 $i+1$–番目の *socle layer* は

$$\mathrm{Soc}^{i+1}(B)/\mathrm{Soc}^{i}(B) \cong \begin{cases} (n-1)S_{C_{p^{n-i}},k} & 0 \le i \le n-1, \\ S_{C_{p^{i-n}},k} & n \le i \le 2n. \end{cases}$$

である．ただし，$0 \le i \le 2n$.

Corollary 6.6 (i) B の *Loewy length* は $2n+1$.
(ii) C_{p^n} の *Burnside functor* が *self-dual* であるための必要十分条件は $n=1$.

7 Representation ring for $\mu_k(G)$

この節では Mackey algebra $\mu_{\mathcal{O}}(G)$ 上の加群の直和と tensor 積に関する表現環について述べる．

7.1 Tensor product

$\mu_{\mathcal{O}}(G)$ の表現環における積はMackey functors の tensor product （あるいは box product [Bo97], [Le81], [Lu96]) であり以下のようにして構成できる．
M, N を G の $\mathcal{O}$ 上の Mackey functors とする．部分群 $H \le G$ に対し R–加群 $T(H)$ を

$$T(H) = < 1_D^H \otimes \mu \otimes \nu \mid \mu \in M(D),\, \nu \in N(D),\, D \in S(H) > \cong \bigoplus_{D \in S(H)} M(D) \otimes_R N(D),$$

で定める．ただし，$1_D^H \otimes$ は単に記号であると考える．$T(H)$ の R–部分加群 (H) は以下の元で生成されたものとする;

(R1) $1_H^H \otimes (\mu_1 + \mu_2) \otimes \nu_0 = 1_H^H \otimes \mu_1 \otimes \nu_0 + 1_H^H \otimes \mu_2 \otimes \nu_0,$

(R2) $1_H^H \otimes \mu_0 \otimes (\nu_1 + \nu_2) = 1_H^H \otimes \mu_0 \otimes \nu_1 + 1_H^H \otimes \mu_0 \otimes \nu_2,$

(R3) $1_H^H \otimes \mu_0 \alpha \otimes \nu_0 = 1_H^H \otimes \mu_0 \otimes \alpha \nu_0,$

(R4) $1_{D'}^H \otimes t_D^{D'}(\mu) \otimes \nu' = 1_D^H \otimes \mu \otimes r_D^{D'}(\nu'),$

(R5) $1_{D'}^H \otimes \mu' \otimes t_D^{D'}(\nu) = 1_D^H \otimes r_D^{D'}(\mu') \otimes \nu,$

(R6) $1_{{}^hD}^H \otimes {}^h\mu \otimes {}^h\nu = 1_D^H \otimes \mu \otimes \nu,$

ただし $\mu_0, \mu_1, \mu_2 \in M(H)$, $\mu \in M(D)$, $\mu' \in M(D')$, $\nu_0, \nu_1, \nu_2 \in N(H)$, $\nu \in N(D)$, $\nu' \in N(D')$, $\alpha \in A(H)$, $h \in H$, $D \le D' \le H$. さらに，部分群 $K \le H \le G$ と $g \in G$に対し，3種類の $\mathcal{O}$-準同型, restriction, induction そして conjugation を以下のように定める;

(T1) $\rho_K^H : T(H) \to T(K)\,;\, 1_D^H \otimes \mu \otimes \nu \mapsto \sum_{g \in [K \backslash H/D]} 1_{K \cap {}^gD}^K \otimes R_{K \cap {}^gD}^{{}^gD}({}^g\mu) \otimes R_{K \cap {}^gD}^{{}^gD}({}^g\nu),$

(T2) $\tau_K^H : T(K) \to T(H)\,;\, 1_D^K \otimes \mu \otimes \nu \mapsto 1_D^H \otimes \mu \otimes \nu$

(T3) $\sigma_g^H : T(H) \to T({}^gH)\,;\, 1_D^H \otimes \mu \otimes \nu \mapsto 1_{{}^gD}^{{}^gH} \otimes c_g^H \mu \otimes c_g^H \nu.$

部分群 $H \le G$ に対して

$$(M \otimes N)(H) = T(H)/I(H)$$

とする．Mackey fuctors M と N の **tensor product** は $M \otimes N$ と上の inductions, restrictions そして conjugations とする．すると，$M \otimes N$ はまた Mackey functor になり，さらに，通常の加

群のテンサー積の普遍性と同様な事実が成り立つ．自明ではないが，Mackey functor のテンソル積，つまり $\mu_k(G)$ の表現環の積に関する単位元はBurnside functor B^G であることや交換法則が成り立つこと等がわかる [Bo97], [Lu96]. この積に関する単位元である B^G が同時に射影的でもあるということが，Mackey algebra の表現論が難解であることの原因のひとつではないかと，筆者は考えている．これは, モジュラー表現論での Green 環における性質とは，決定的に異なっている点である．つまり，Mackey functors では，射影的なものとのテンソル積が射影的になるとは限らないということである．以下は, $G = C_2$ の標数 2 の体 k の上の Mackey algebra $\mu_k(G)$ の表現環における乗積表である．P. Webb が計算したものである．

$\otimes$	$S_{1,1}$	$S_{G,1}$	FP_k	FQ_k	$P_{1,1}$	$P_{G,1}$
$S_{1,1}$	FQ_k	0	$S_{1,1}$	FQ_k	$P_{1,1}$	$S_{1,1}$
$S_{G,1}$	0	$S_{G,1}$	$S_{G,1}$	0	0	$S_{G,1}$
FP_k	$S_{1,1}$	$S_{G,1}$	FP_k	FQ_k	$P_{1,1}$	FP_k
FQ_k	FQ_k	0	FQ_k	FQ_k	$P_{1,1}$	FQ_k
$P_{1,1}$	$P_{1,1}$	0	$P_{1,1}$	$P_{1,1}$	$P_{1,1} \oplus P_{1,1}$	$P_{1,1}$
$P_{G,1}$	$S_{1,1}$	$S_{G,1}$	FP_k	FQ_k	$P_{1,1}$	$P_{G,1}$

ここで $1 := S_{1,1}$, $2 := S_{G,1}$ とすると，$P_{1,1}$ は 1 の projective cover, $P_{G,1}$ は 2 の projective cover であり

$$P_{1,1} \cong FP_{kG} \cong \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}, \quad P_{G,1} \cong B^G \cong \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}, \quad FP_k \cong P_{G,1}/2 \cong \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}, \quad FQ_k \cong P_{1,1}/1 \cong \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix},$$

である．

8 The Auslander-Reiten quiver

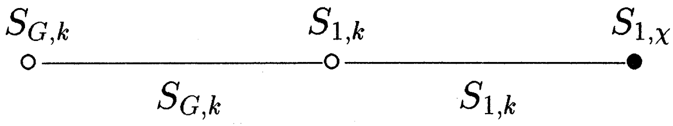
正標数の体 k に対して $\mu_k(G)$ は Artin 環なのでalmost split sequence が存在し, Auslander-Reiten quiver を考えることができる．例えば、G が素数位数 p の巡回群の場合には, Thévenaz と Webb の結果により Brauer tree algebra になることがわかっているので, Auslander-Reiten quiver は自動的に分かる．この場合 $\mu_k(G)$ は２つのsimple modules (simple Mackey functors) $S_{1,1}$ と $S_{G,1}$ をもつ．ここでは, $1 = S_{1,1}$, $p = S_{G,1}$ とする．$\mu_k(G)$ の直既約射影分解は以下のように表される．

$$\mu_k(G) \cong FP_{kG} \oplus B^G \cong \begin{matrix} & 1 & \\ & & 1 \\ p & & \vdots \\ & & 1 \\ & 1 & \end{matrix} \oplus \begin{matrix} p \\ 1 \\ p \end{matrix}.$$

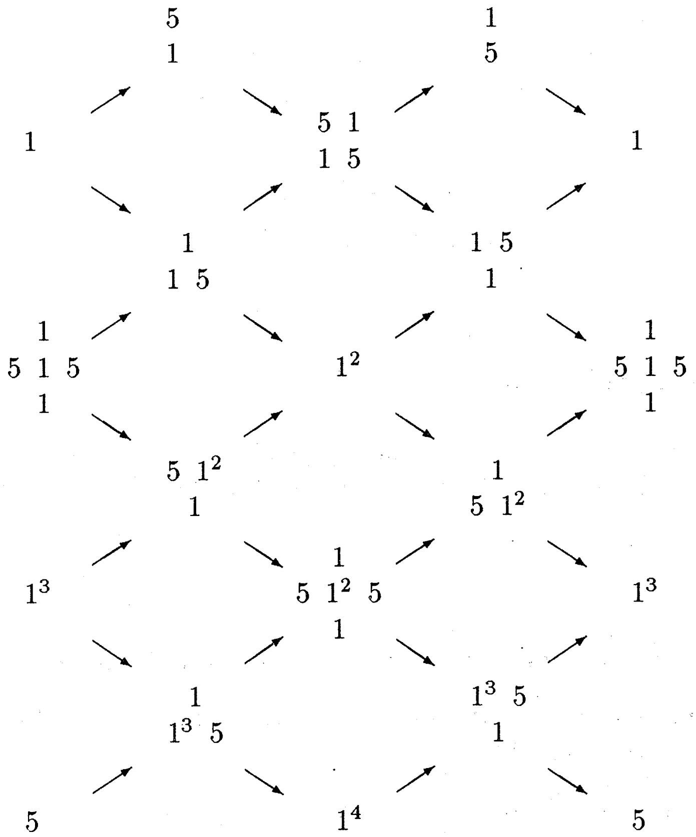
ただし，FP_{kG} の組成因子として現れる simple Mackey functor 1 の重複度は p, p の重複度は 1 である．素数 p を固定すると $\mu_k(G)$ が Brauer tree algebra であるということを用いることにより, $\mu_k(G)$ の Auslander-Reiten quiver が以下のように計算できる．

8.1 Example

$G = C_5$, $p = 5$ とする．このとき，Brauer tree は以下のようになる [TW95].



ただし，exceptional vertex ● の重複度は 4 である．このとき，[BC98], [Re77] に従うと以下のようにstable Auslander-Reiten quiver が定まる．



ただし，1^n は長さ n で組成因子がすべて 1 である uniserial module である．さらに，quiver の左右の両端は同一視する．

9 $\mu_k(G)$-mod の制限

モジュラー表現論の基本的な命題として，群環の部分群への制限は自由加群になるというものがあるが，Mackey algebra ではこれも成り立たない．

Example 9. 1 G を位数 4 の巡回群にする．このとき，*indecomposable projective* $\mu_k(G)$*-modules* は以下のようであった;

$$FP_{kG} \cong \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 2 & & 1 \\ 4 & & \\ 2 & & 1 \\ & 1 & \end{array}, \quad B^C \uparrow_C^G \cong \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 4 & & 1 \\ 2 & & 2 \\ 1 & & 4 \\ & 2 & \end{array}, \quad B^G \cong \begin{array}{cc} 4 & \\ 2 & \\ 1 & 4 \\ 2 & \\ 4 & \end{array}.$$

これらの位数 2 の部分群へ制限したものの構造は以下のように計算できる;

$$FP_{kG} \downarrow_C^G \cong \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \oplus \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array}, \quad (B^C \uparrow_C^G) \downarrow_C^G \cong \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 2 \end{array} \oplus \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 2 \end{array}, \quad B^G \downarrow_C^G \cong \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 2 \end{array}.$$

従って

$$\mu_k(G) \downarrow_C^G \cong \mu_k(C) \oplus \mu_k(C) \oplus B^C.$$

が成り立つ．ゆえに一般に，*Mackey algebra* $\mu_k(G)$ の部分群 $H \leq G$ への制限は $\mu_k(H)$-加群とみて自由ではない．

10 Webb's method

講演では Webb による $G = C_4$ の場合の Mackey algebra $\mu_k(G)$ の relative Auslander-Reiten quiver の計算についても触れたが，ここでは，参考文献 [We99] を挙げるに留める．

参考文献

[Be91] D.J. Benson, *Representations and cohomology I,* Cambridge University Press 1991.

[BC98] F. M. Bleher and T. Chinburg, *Using quivers to compute Ext groups for Brauer tree algebras,* preprint (1998).

[BC87] D.J. Benson and J.F. Carlson, *Diagrammatic methods for modular representations and cohomology,* Comm. in Algebra **15**, 1987.

[Bo97] S. Bouc, *Green Functors and G-sets,* Lecture Notes in Mathematics **1671**, Springer-Verlag 1997.

[Dr72] A.W.M. Dress, *Contributions to the theory of induced representations* In:*Algebraic K-theory II,* Proc. Batelle Institute Conference 1972 (Ed. H. Bass) Lecture Notes in Mathematics **342**, 183-240, Springer-Verlag 1973.

[Gr 71] J. A. Green, *Axiomatic representation theory for finite groups,* J. Pure Appl. Algebra **1**, (1971), 41-77.

[Le81] L. G. Lewis, Jr., The theory of Green functors, Unpublished notes, 1981.

[Lu96] F. Luca, The Algebra of Green and Mackey Functors, Ph.D. dissertation, UAF , 1996.

[Od99] F. Oda, *On Burnside functors,* 数理解析研究所講究録 **1109**, (1999), 118-128.

[Re77] I. REITEN, *Almost split sequences for group algebras of finite representation type,* Trans. A.M.S. **233** (1977), 125-136.

[Th91] J. THÉVENAZ, *Defect theory for maximal ideals and simple functors,* J. Algebra, **140** (1991), 426-483.

[Sa82] H. SASAKI, *Green correspondence and transfer theorems of Wielandt type for G-functors,* J. Algebra, **79** (1982), 98-120.

[TW89] J. THÉVENAZ and P.J. WEBB, *Simple Mackey functors,* Proc. of 2nd International Group Theory Conference, Bressanone (1989), Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 23, 1990, pp. 299-319.

[TW95] J. THÉVENAZ and P.J. WEBB, *The structure of Mackey functors,* Trans. A.M.S. **347** (1995), 1865-1961.

[We98] P.J. WEBB, private communication.

[We99] P. WEBB, *Stratifications and Mackey functors I: Functors for a single group,* preprint, (1999).

[Yo83] T. YOSHIDA, *On G-functors (II): Hecke operators and G-functors,* J. Math. Soc. Japan, **35** (1983), 179-190.

[Yo85] T. YOSHIDA, *Idempotents and transfer theorems of Burnside rings, character rings and span rings,* Algebraic and Topological Theories, Kinokuniya, Tokyo, (1985), 589-615.